ПРИМЕРНИ ЗАДАЧИ ЗА ИКОНОМИЧЕСКИ СПЕЦИАЛНОСТИ

Задача 1. Дадени са уравненията на основата $AB: x+y-1=0$ и на бедрото $BC: x-2y-2=0$ на равнобедрен триъгълник. Да се намери уравнението на другото бедро AC, ако то минава през точката $M(-2,0)$.

Решение. За да напишем уравнението на бедрото AC ще използваме, че то минава през точката $M(-2,0)$, т.е. уравнението има вида

$$AC: y-0=k(x-(-2)) \Leftrightarrow AC: y=k(x+2).$$

По условие $\angle CAB=\angle ABC$. Следователно $tg\left(\angle CAB\right)=tg\left(\angle ABC\right)$. Но

$$tg\left(\angle ABC\right)=\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{BC}k_{AB}},\ k_{AB}=-1,\ k_{BC}=\frac{1}{2}.$$

Като заместим, намираме $tg\left(\angle ABC\right)=-3$. Тогава

$$tg\left(\angle CAB\right)=\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AB}k_{AC}} \Leftrightarrow -3=\frac{k_{AC}+1}{1-k_{AC}}, \text{ откъдето } k_{AC}=2.$$

Окончателно получаваме $AC: y-0=2(x+2),\ AC: 2x-y+4=0.$

Задача 2. Дадени са уравненията на две страни на ΔABC: $5x-4y+15=0$, $4x+y-9=0$ и пресечната точка на медианите $G(0,2)$. Да се намери уравнението на третата страна на триъгълника.

Решение. Нека $CA: 5x-4y+15=0$, $AB: 4x+y-9=0$. Решаваме системата уравнения на двете страни

$$\left|\begin{array}{l}5x-4y+15=0\\4x+y-9=0\end{array}\right.$$

и намираме координатите на пресечната им точка $A(1,5)$. Нека A_0 е пресечната точка на медианата през върха A със страната BC. Като използваме свойството на медицентъра в триъгълник (дели всяка от медианите в отношение 2:1, считано от върха) получаваме $\frac{|AG|}{|GA_0|}=\frac{2}{1}=\lambda$.

Тогава, от формулите за делене на отсечка в дадено отношение намираме $A_0\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Нека върховете $B(x_B,y_B)$ и $C(x_C,y_C)$. Тъй като B лежи на страната AB, а C – на CA, то координатите им удовлетворяват уравненията на двете страни: $5x_C-4y_C+15=0$, $4x_B+y_B-9=0$.

От друга страна точка A_0 е среда на отсечката BC, т.е.

$$-\frac{1}{2}=\frac{x_B+x_C}{2},\ x_B+x_C+1=0,\ \frac{1}{2}=\frac{y_B+y_C}{2},\ y_B+y_C-1=0.$$

Като решим получената система от четири уравнения с четири неизвестни:

$$\left|\begin{array}{l}5x_C-4y_C+15=0\\4x_B+y_B-9=0\\x_B+x_C+1=0\\y_B+y_C-1=0\end{array}\right.,$$

намираме координатите на върховете B и C: $B(2,1)$, $C(-3,0)$.

Накрая по формула за уравнение на права през две точки намираме $BC: x+2y-7=0$.

Задача 3. Дадена е матрица $A=\begin{Vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. Да се пресметне $A^{2015}=?$

Решение. Намираме последователно:

$$A^2=\begin{Vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.\begin{Vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A^3=\begin{Vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}.\begin{Vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{Vmatrix},$$

$$A^4=\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{Vmatrix}.\begin{Vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}=E.$$

Тогава

$$A^{2015}=A^{2012}A^3=(A^4)^{503}A^3=E^{503}A^3=A^3=\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Задача 4. Нека x_1 и x_2 са реалните корени на уравнението $x^2-x+a=0$ $\left(a\in R,\ a>0\right)$. Да се докаже, че $\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)^2\geq\dfrac{25}{2}$.

Решение. Стойностите на a, за които дискриминантата е по-голяма или равна на нула, са $a\in\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right]$. Като отчетем даденото в условието, се получава допустимата област $a\in\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right]$. По формулите на Виет за корените x_1 и x_2 е в сила $\left|\begin{aligned} x_1+x_2&=1 \\ x_1.x_2&=a \end{aligned}\right.$. Тогава имаме $\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)^2=\dfrac{-2a^3+5a^2-2a+1}{a^2}=f(a)$. Първата производна на функцията е $f'(a)=\dfrac{-2a^3+2a-2}{a^3}$. Тъй като $a\in\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right]$, то изразът в числителя е отрицателен, а този в знаменателя – положителен. Следователно $f'(a)<0$ и $f(a)$ е намаляваща за всички стойности на a в посочения интервал. Тогава функцията достига своята най-малка стойност при $a=\dfrac{1}{4}$ и $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{25}{2}$, с което неравенството е доказано.

Задача 5. Дадени са кривата $h:\dfrac{x^2}{1-b}+\dfrac{y^2}{b}=1$ $(b<0)$ и правата $l: x-3y=0$, които се пресичат в точките A и B. Да се пресметне стойността на параметъра b, за която отсечката AB има минимална дължина.

Решение. Координатите на пресечните точки са решения на системата $\begin{vmatrix} \dfrac{x^2}{1-b}+\dfrac{y^2}{b}=1 \\ x-3y=0 \end{vmatrix}$ $\Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} y^2=\dfrac{b(1-b)}{8b+1} \\ x=3y \end{vmatrix}$. От условието следва, че тя трябва да има две решения (кривата h пресича правата l в две точки). Понеже по условие $b<0$, то $b\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{8}\right)$. Пресечните точки на h и l имат координати: $A\left(\dfrac{-3b(1-b)}{8b+1},\dfrac{-b(1-b)}{8b+1}\right)$ и $B\left(\dfrac{3b(1-b)}{8b+1},\dfrac{b(1-b)}{8b+1}\right)$, а дължината на отсечката AB е $|AB|=\sqrt{\dfrac{40b(1-b)}{8b+1}}$.

Трябва да се намери най-малката стойност на функцията $f(b)=\dfrac{b(1-b)}{8b+1}$ в интервала $\left(-\infty,-\dfrac{1}{8}\right)$.

Производната $f'(b)=\dfrac{-8b^2-2b+1}{(8b+1)^2}$, функцията $f(b)$ намалява в интервала $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ и расте в интервала $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{8}\right)$. Следователно при $b=-\dfrac{1}{2}$ има единствен локален екстремум, който се явява и най-малката й стойност.

Задача 6. За кои стойности на a и b точката $M(1,3)$ е инфлексна точка на функцията $y=ax^3+bx^2$.

Отг.: $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{9}{2}$.

Задача 7. Дадени са точките $A(1;0)$, $B(2;0)$ и $C(0;4)$. Ако т. H е ортоцентър на ΔABC, а т. O – център на описаната около ΔABC окръжност, да се намери дължината на отсечката OH.

Отг.: $|OH|=\dfrac{\sqrt{157}}{4}$.

Задача 8. Дадена е функцията $f(x)=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{x}$. Точка M е от графиката на $f(x)$. Да се намери най-малкото разстояние между т. M и началото на координатната система.

Отг.: 2.

Задача 9. Колко пъти лицето на триъгълник ABC: $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(4,1)$ е по-малко от лицето на триъгълника, образуван от положителните координатни полуоси и правата, минаваща през медицентъра на триъгълник ABC и успоредна на височината му през върха C?

Отг.: $\dfrac{289}{108}$.

ПРИМЕРНИ ЗАДАЧИ ЗА СПЕЦИАЛНОСТ „ИНФОРМАТИКА”

Задача 1. Да се пресметне детерминантата от n-ти ред:

$$D_n = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение. Към първия стълб на D_n прибавяме всички останали, в резултат на което:

$$D_n = \begin{vmatrix} 9+(n-1) & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 9+(n-1) & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 9+(n-1) & 1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 9+(n-1) & 1 & 1 & \dots & 9 & 1 \\ 9+(n-1) & 1 & 1 & \dots & 1 & 9 \end{vmatrix}.$$

Прибавяме първия ред, умножен по (-1), към всички останали редове. Получаваме:

$$D_n = \begin{vmatrix} 8+n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Детерминантата е в триъгълен вид, следователно тя е равна на произведението на елементите по главния диагонал:

$$D_n = (8+n).\underbrace{8.8.\dots.8}_{n-1} = (8+n).8^{n-1}.$$

Задача 2. Дадена е матрица $A = \begin{Vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. Да се пресметне $A^{2015} = ?$

Решение. Намираме последователно:

$$A^2 = \begin{Vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A^3 = \begin{Vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{Vmatrix},$$

$$A^4 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = E.$$

Тогава

$$A^{2015} = A^{2012}A^3 = (A^4)^{503}A^3 = E^{503}A^3 = A^3 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Задача 3. Да се намери рангът на матрицата A в зависимост от параметъра $a \in R$:

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ a & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ a-2 & 0 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Решение. Сменяме местата на стълбовете и получаваме еквивалентната матрица. С нея извършваме последователно елементарни преобразувания, за да я сведем до стъпаловидна:

- прибавяме първия ред към втория;

- умножаваме елементите на втория ред по $\left(-\frac{3}{5}\right)$ и ги прибавяме към съответните елементи на третия ред; умножаваме елементите на втория ред по (-1) и ги прибавяме към съответните елементи на четвъртия ред.

$$\begin{Vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & a-2 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & a-2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & a-2 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & a-2 \\ 0 & 0 & \frac{-3a+21}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Възможни са следните случаи:

Първи случай: Ако $\frac{-3a+21}{5} = 0, a = 7$, стъпаловидната матрица има два ненулеви реда, следователно $r(A) = 2$.

Втори случай: Ако $\frac{-3a+21}{5} \neq 0, a \neq 7$, стъпаловидната матрица има три ненулеви реда, следователно $r(A) = 3$.

Задача 4. Дадени са уравненията на основата $AB: x + y - 1 = 0$ и на бедрото $BC: x - 2y - 2 = 0$ на равнобедрен триъгълник. Да се намери уравнението на другото бедро AC, ако то минава през точката M(-2,0).

Решение. За да напишем уравнението на бедрото AC ще използваме, че то минава през точката M(-2,0), т.е. уравнението има вида

$$AC: y - 0 = k(x - (-2)) \Leftrightarrow AC: y = k(x+2).$$

По условие $\angle CAB = \angle ABC$. Следователно $tg\left(\angle CAB\right) = tg\left(\angle ABC\right)$. Но

$$tg\left(\angle ABC\right) = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{BC}k_{AB}},\ k_{AB} = -1,\ k_{BC} = \frac{1}{2}.$$

Като заместим, намираме $tg\left(\angle ABC\right) = -3$. Тогава

$$tg\left(\angle CAB\right) = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AB}k_{AC}} \Leftrightarrow -3 = \frac{k_{AC} + 1}{1 - k_{AC}},\text{ откъдето } k_{AC} = 2.$$

Окончателно получаваме $AC: y-0=2(x+2),\ AC: 2x-y+4=0.$

Задача 5. Дадени са уравненията на две страни на ΔABC: $5x-4y+15=0$, $4x+y-9=0$ и пресечната точка на медианите $G(0,2)$. Да се намери уравнението на третата страна на триъгълника.

Решение. Нека $CA: 5x-4y+15=0$, $AB: 4x+y-9=0$. Решаваме системата уравнения на двете страни

$$\left|\begin{array}{l}5x-4y+15=0\\4x+y-9=0\end{array}\right.$$

и намираме координатите на пресечната им точка $A(1,5)$. Нека A_0 е пресечната точка на медианата през върха A със страната BC. Като използваме свойството на медицентъра в триъгълник (дели всяка от медианите в отношение 2:1, считано от върха) получаваме $\dfrac{|AG|}{|GA_0|}=\dfrac{2}{1}=\lambda$.

Тогава, от формулите за делене на отсечка в дадено отношение намираме $A_0\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

Нека върховете $B(x_B,y_B)$ и $C(x_C,y_C)$. Тъй като B лежи на страната AB, а C – на CA, то координатите им удовлетворяват уравненията на двете страни: $5x_C-4y_C+15=0$, $4x_B+y_B-9=0$.

От друга страна точка A_0 е среда на отсечката BC, т.е.

$$-\frac{1}{2}=\frac{x_B+x_C}{2},\ x_B+x_C+1=0,\ \frac{1}{2}=\frac{y_B+y_C}{2},\ y_B+y_C-1=0.$$

Като решим получената система от четири уравнения с четири неизвестни:

$$\left|\begin{array}{l}5x_C-4y_C+15=0\\4x_B+y_B-9=0\\x_B+x_C+1=0\\y_B+y_C-1=0\end{array}\right.,$$

намираме координатите на върховете B и C: $B(2,1)$, $C(-3,0)$.

Накрая по формула за уравнение на права през две точки намираме $BC: x+2y-7=0$.

Задача 6. Да се пресметне детерминантата

$$D_{2n}=\begin{vmatrix}a&0&0&\dots&0&b\\0&a&0&\dots&b&0\\0&0&a&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&b&0&\dots&a&0\\b&0&0&\dots&0&a\end{vmatrix}.$$

Отг.: $(a^2-b^2)^n$.

Задача 7. Да се реши системата в зависимост от стойностите на параметъра λ:

$$\left|\begin{array}{llll}x_1&+x_2&+x_3&=&1,\\x_1&+x_2&+\lambda x_3&=&2,\\x_1&+\lambda x_2&+\lambda x_3&=&3.\end{array}\right.$$

Отг.: При $\lambda \neq 1$: $x_1 = \dfrac{\lambda - 3}{\lambda - 1}$, $x_2 = \dfrac{1}{\lambda - 1}$, $x_3 = \dfrac{1}{\lambda - 1}$;

при $\lambda = 1$: системата няма решение.

Задача 8. Дадени са точките $A(1;0)$, $B(2;0)$ и $C(0;4)$. Ако т. H е ортоцентър на ΔABC, а т. O – център на описаната около ΔABC окръжност, да се намери дължината на отсечката OH.

Отг.: $|OH| = \dfrac{\sqrt{157}}{4}$.

Задача 9. Колко пъти лицето на триъгълник *ABC: A*(1,1), *B*(2,3), *C*(4,1) е по-малко от лицето на триъгълника, образуван от положителните координатни полуоси и правата, минаваща през медицентъра на триъгълник ABC и успоредна на височината му през върха C?

Отг.: $\dfrac{289}{108}$.