РЕЗЮМЕТА

на научните публикации след защита на дисертация за придобиване на образователна и научна степен доктор
на Теодора Димова Запрянова
главен асистент в катедра “Математически науки”
при Икономически университет – Варна
по конкурс за “доцент”

1. НАУЧНИ СТАТИИ

- **Teodora Dimova Zapryanova**, A Characterization of the K-functional for the Algebraic Version of the Trigonometric Jackson Integrals $G_{s,n}$ and the K-functionals for Cao-Gonska operators $G_{s,n}^{*}$ and $G_{s,n}^{+}$. Results. Math. **54** (2009), 397-413.

Една основна задача в теорията на апроксимациите е намирането на оценка на скоростта на приближение в даден апроксимационен процес. Изключително полезни за тази цел са K-функционалите. Нека X е банахово пространство. За $f \in X$ и $t > 0$ K-функционалът се дефинира като

$$K(f,t) = K(f,t : X,Y,D) = \inf_{g \in Y} \left\{ \|f - g\|_X + t\|Dg\|_X \right\},$$

където D е диференциален оператор. Има неудобство свързано с практическото пресмятане на стойността на K-функционала, тъй като класът функции, за които може да се пресметне е твърде тесен. Този недостатък може да се преодолее като се намери величина $\Omega(f,t)$, наречена модул на гладкост, която е еквивалентна на K-функционала, т.е.

$$c^{-1}\Omega(f,t) \le K(f,t^r) \le c\Omega(f,t),$$

където $c > 0$ е константа, независеща от f и t.

В статията са конструирани модули на гладкост, които са еквивалентни на K-функционалите, които характеризират грешката на приближение с алгебричната версия на тригонометричните интеграли на Джексън $G_{s,n}$ и операторите от тип на Као-Гонска $G_{s,n}^{*}$ и $G_{s,n}^{+}$ в равномерна метрика.

Статията съдържа четири дефиниции, доказани са три леми, три теореми и от тях са получени 3 следствия. Разгледан е пример на функция, за която е пресметнат ръста на въведените модули и е сравнен с ръста на модула на Дициан-Тотик.

Настоящата статия притежава импакт фактор 0.513 към момента на публикуването и.

Т. Запрянова

- **Teodora D. Zapryanova**, Generalized characterization theorem for the K-functional associated with the algebraic version of trigonometric Jackson Integrals. General Mathematics Vol.20, 5 (2012), Special Issue, 159-180.

В тази статия е направена характеризация на K-функционала, свързан с оператора на Джексън $G_{s,n}$ в $L_p[-1,1]$ за $1 \le p \le \frac{1}{\lambda}, \lambda \in (0,1]$ с модула на Дициан-Тотик. По-общият вид на диференциалния оператор в дефиницията на K-функционала и свързания с него оператор A разширява резултата на Иванов формулиран в Теорема В, който се получава при $\lambda = 1$ в доказаната Теорема 1. Теорема 3.1 от монографичния труд също се получава като частен случай на Теорема 1 при $\lambda = 1/2$. Като следствие на Теорема 1 се получава характеризация на K-функционала с модул на гладкост. Намирането на модул, който е еквивалентен на конкретен K-функционал минава през две стъпки. Първо се доказва еквивалентност между два K-функционала, като вторият се разглежда не за функцията f, а след действието на линеен оператор Af. При това диференциалният оператор на втория K-функционал е такъв, че е известен модул на гладкост, който е еквивалентен на този K-функционал. Така на втората стъпка се получава характеризация на първия K-функционал с модул на гладкост разгледан за Af. Първата стъпка изисква доказателства на редица свойства на линейния оператор A (ограниченост, диференциални свойства) както и обратимост на оператора A и подобни свойства на обратния оператор A^{-1}. Това е направено в Теореми 3, 4 и 5. След това в Лема 2 е доказана еквивалентност на двата K-функционала, но когато инфимумът в тях е върху по-тесни пространства Z_1 и Z_2. В Лема 1 и Лема 3 съответно се доказва, че всеки от тези K-функционали има същата стойност, когато инфимумът е върху по-широкото пространство от функции C^2.

Даден е пример на функция, който показва, че за $\lambda = \frac{1}{2}$ двата K-функционала не са еквивалентни, ако вторият се разглежда не за Af, а за f.

Връзката между разглежданите K-функционали при $\frac{1}{\lambda} < p < \infty, \lambda \in (0,1]$ е дадена в Теорема 2.

Т. Запрянова

- **Teodora D. Zapryanova**, Saturation of Cao-Gonska operators Λ^* and Λ^+. Results. Math., 62 (2012), 445-457.

Статията е написана по покана и е включена в специалното издание на Results in Mathematics в памет на Werner Haußmann (1941 – 2010).

В тази статия е направена характеризация с K-функционал и модул на гладкост на грешката на приближение с дискретната версия на оператора на Джексън и дискретната версия на операторите на Као-Гонска. Тези дискретни оператори са конструирани от Као и Гонска през 1989 г.. Като се използва резултат на Берман в Теорема 1 се доказва еквивалентност на грешката на приближение на тези оператори с грешката на приближение на оператора на Джексън и операторите на Као-Гонска съответно. Като следствие на Теорема 1 и Теореми B и C се получава характеризация на грешката на приближение с дискретните оператори посредством съответните *K*-функционали и модули на гладкост, като се дава възможност да се изчисляват точните порядъци на грешките (Следствие 1).

Характеризацията на приближенията с дискретните оператори чрез *K*-функционали от Следствие 1 показва, че порядъкът на сходимост на дискретната версия на операторите на Као-Гонска не може да е по-бърз от $\frac{1}{n^2}$, ако $H(I-L)f \neq 0$ или $(I-L)Hf \neq 0$ съответно. Във втора глава на статията е определен класът функции, за които този оптимален ръст се достига (класът на насищане на тези оператори). Теореми 2 и 3 показват, че това е зададеният в Дефиниция 4 клас S, като се изключат линейните функции. Единствено за тях този порядък на сходимост е по-бърз от $\frac{1}{n^2}$. Доказани са две леми, които се използват за доказателството на Теорема 3.

В глава 3 е разгледан проблем поставен от Бутцер на конференция в Будапеща през 1980 г. . Показано е, че дискретната версия на операторите на Као-Гонска дава решение на този проблем, определен от Бутцер като „част от математическия фолклор”. В Теорема 6 е показано, че тези дискретни оператори приближават функцията с порядък $O(n^{-\alpha})$, при условие че функцията принадлежи на класа $Lip_2(\alpha, C), 0 < \alpha \leq 2$.

Разгледани са два примера на функции, които илюстрират доказаните теореми.

Списанието Results in Mathematics, в което е публикувана статията притежава импакт фактор 0.508 към момента на публикуване.

Т. Запрянова

- **Teodora Zapryanova**, **Gancho Tachev**, Generalized Inverse Theorem for Schoenberg Operator. Journal of Modern Mathematics Frontier, Vol.1 Issu.2 2012, pp. 11-16.

Тази статия разширява обратния резултат на Beutel, Gonska, Kacso и Tachev за така наречения сплайн случай ($k = 1,2,3$) на оператора на Шоенберг в терминологията на втори класически модул на гладкост. Теоремата е доказана за фиксирано $k \geq 4$, и $n \to \infty$. В конкретен случай ($n = 1, k \geq 1$) операторът на Шоенберг се редуцира до класическия оператор на Бернщайн, за който през 1972 г. Berens и Lorentz доказват обратен резултат. Като се използва тяхна основна лема от книгата на DeVore и Lorentz в статията е получен обратен резултат за оператора на Шоенберг. Доказаната теорема е получена при опит да се потвърди предположението на Гонска за обобщение на обратните резултати за оператора на Бернщайн и случая $k = 1,2,3$ за оператора на Шоенберг. Използват се две леми. В Лема 1 е доказано неравенство от тип на Бернщайн за оператора на Шоенберг, т.е.получена е оценка отгоре на нормата на втората производна на оператора на Шоенберг посредством нормата на апроксимираната функция умножена по подходящ израз, зависещ само от k и от n. В Лема 2 се доказва, че нормата на втората производна на оператора на Шоенберг е ограничена от нормата на втората производна на апроксимираната функция (този факт е известен за производните на класическия оператор на Бернщайн). С помощта на тези две леми, както и с помощта на Лема 3([4]), се доказва основния резултат (Теорема 1), като се прилага метода на DeVore и Lorentz за доказателството на обратен резултат за оператора на Бернщайн в [4].

Т. Запрянова

- **Teodora Zapryanova**, **Gancho Tachev**, Approximation by the iterates of Bernstein operator. AIP Conf. Proc. 1497, 184-189 (2012).

Тази статия изследва ръста на поточкова сходимост на итерациите на оператора на Бернщайн към неговия граничен оператор. Получена е количествена оценка свързана с предположението на Гонска и Раша от 2006 г. . Нагел показва, че за редица от естествени числа k_n, такива че $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k_n}{n}=\infty$ редицата от итерации на оператора на Бернщайн $(B_n^{k_n})_{n\in N}$ клони към интерполационния оператор на Лагранж. Гонска и Раша разглеждат итерации на оператора на Бернщайн $B_n^{k_n}$ в случай $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k_n}{n}=t\geq 0$ и получават количествено описание на сходимостта на тези оператори към граничния оператор. Доказателството на техния резултат се опира на теорията на полугрупи от оператори. За разлика от тях резултатът в тази статия е получен от някои класически неравенства за оператора на Бернщайн и оценка за разликата на два положителни линейни оператора. Доказана е Лема 1, която дава представяне на втория момент на m-тата итерация на оператора на Бернщайн.

Настоящата статия притежава импакт фактор 0.112 към момента на публикуването и.

Т. Запрянова

- **Teodora Zapryanova**, A Chracterization of the *K*-functional for the Algebraic Version of the Trigonometric Jackson Integrals $G_{s,n}$ in Weighted Integral Metric. AIP Conf. Proc.(2013) (приета за печат)

В тази статия са въведени модули на гладкост, които дават възможност да се изчислява порядъка на грешката на приближение с алгебричната версия на тригонометричните интеграли на Джексън в интегрална метрика с тегло. Доказана е еквивалентност на въведения модул с *K*-функционал.

Т. Запрянова

2. НАУЧНИ ДОКЛАДИ

- **Teodora Zapryanova**, Best approximation and moduli of smoothness. Pliska Stud. Math. Bulgar. **21** (2012), 299-306.

Тази статия е изнесена като доклад на Международната Конференция по Частни Диференциални Уравнения и Приложения, София, 14-16 септември, 2011 г. посветена на 65 годишнината на акад. Петър Попиванов. Разгледани са модули на гладкост, въведени от различните школи по апроксимации с цел характеризация на най-доброто алгебрично приближение. Това е обзорен доклад за различните модули на гладкост, които са въведени, за да се получи резултат аналогичен на (2) за връзката между най-доброто тригонометрично приближение и класическия модул на гладкост. Анонсираните резултати (10) са доказани в монографичния труд и са представени на международните конференции Constructive Theory of Functions - 2013 и Applications of Mathematics in Engineering and Economics - 2013.

Т. Запрянова

- **Запрянова Т. Д.**, О наилучшем приближении функции в равномерномерной метрике алгебраическими многочленами и обобщенном модуле гладкости. Теория и практика современной науки: материалы VI Международной научно-практической конференции, Институт стратегических исследований, Москва, 2012, 26-33.

Този доклад разглежда най-доброто алгебрично приближение на функция и характеризацията му с модул на гладкост. Доказано е неравенство на Джексън (Теорема 1) и слаба обратна теорема за връзката между разглеждания модул на гладкост и най-доброто приближение на функция с алгебрични полиноми в равномерна метрика (Теорема 2). Същият модул е разгледан и от Потапов [1], но доказателството на Потапов използва оценки за алгебрични полиноми на Халилова. Предимство в сравнение с резултата на Потапов дава обратния резултат (2), който заедно с (3) и (4) води до нова характеризация на най-доброто алгебрично приближение посредством грешката на оператора на Джексън в равномерна метрика. За доказателството на двете теореми се използват три леми, втората от които е доказана.

Т. Запрянова

- **Teodora Zapryanova**, On Approximation by Algebraic Polynomials in Weighted integral Metric. Proceedings of the International Conference Nonlinear Difference and Differential Equations and their Applications, Russe, October 3-October 6, 2012, pp.93-103.

Теоремите представени в този доклад пренасят резултатите от равномерна в интегрална метрика с тегло (неравенство на Джексън и слаба обратна теорема) връзката между най-добрите алгебрични приближения и дефинирания модул на гладкост. Тук отново благодарение на обратния резултат (6) и резултатите (7) и (8) се получава характеризация на най-доброто алгебрично приближение с тегло с грешката на оператора на Джексън в интегрална метрика с тегло.

Т. Запрянова

3. МОНОГРАФИЧЕН ТРУД

- **Теодора Димова Запрянова**, За приближенията с алгебричния вариант на оператора на Джексън, модификациите на Као-Гонска и най-добрите алгебрични приближения. '' Наука и икономика'', 2013.

Определянето на ръста на приближение в даден апроксимационен процес е основна задача в теорията на апроксимациите. Оценката отгоре на грешката на приближение с подходящ *К*-функционал или модул на гладкост – това са така наречените прави теореми. За да се покаже,че получената оценка е точна по порядък се доказва и обратно неравенство между функционалните характеристики (*К*-функционал и модул) с грешката от апроксимациите. Това са обратните теореми. Получаването на обратни теореми от силен тип (едно събираемо в дясната страна на неравенството) е значително по-нова тенденция, технически по-трудно и възможно само за някои апроксимационни процеси. Това е актуална тематика и с редица ведущи резултати от български математици – Бл. Сендов, В. Попов, П. Петрушев, К. Иванов и др. . Монографичният труд представя едно ново изследване на приближението на функции с алгебрични оператори от тип на Джексън и модификациите на Као – Гонска, в което са доказани прави и силни обратни теореми. В правите теореми, получени от Гонска и Као се използва класически втори модул на гладкост, който обаче не позволява съгласувана обратна теорема. Тук се променят характеристиките, като се дефинират подходящи *К* - функционали и свързани с тях модули на гладкост. Постигната е пълна характеризация на апроксимационния процес, като са доказани прави и съгласувани обратни теореми от силен тип.

В редица апроксимационни процеси грешката се оценява чрез подходящ K-функционал. Най-общо неговият вид е:

$$K(f,t)=K(f,t,X,Y,D):=\inf\left\{\|f-g\|_X+t\|Dg\|_X : g\in Y\right\},$$

където X е Банахово пространство, D е диференциален оператор и $Y\subseteq D^{-1}(X)=\{g\in X : Dg\in X\}$. За дадени X, Y и D, K - функционалът се разглежда за всяка функция $f \in X$ и $t > 0.$

За конкретни оператори Q_n са известни оценки от вида

$$\|f - Q_n f\|_X \leq cK(f, \lambda(n)),$$

$\lambda(n) \to 0$ при $n \to \infty,$ c е константа, независеща от f и n. Това неравенство е известно като право неравенство. То е интересно, когато е възможно най-доброто в някакъв смисъл. Това води до изучаването на неговото обратно. Дициан и Иванов доказват, че в много случаи оператори, за които е в сила оценка на грешката отгоре с K-функционал, има оценка и отдолу от вида

$$K(f, \lambda(n)) \leq c\|f - Q_n f\|_X.$$

Това е строго обратно неравенство от тип A в терминологията на [23]. Правото и обратното неравенство водят до еквивалентност между $K(f, \lambda(n))$ и $\|f - Q_n f\|_X$, което за краткост бележим с

$$K(f, \lambda(n)) \sim \|f - Q_n f\|_X.$$

Намирането на инфимума в дефиницията на K- функционала не винаги е възможно, затова е удобно да има модул на гладкост $\Omega(f,t)$ (който можем да пресметнем), еквивалентен на K - функционала. Това означава да съществува константа $c > 0,$ независеща от f и t такава, че

$$c^{-1}\Omega(f,t) \leq K(f,t) \leq c\,\Omega(f,t),$$

което бележим с $K(f,t) \sim \Omega(f,t).$

В теорията на апроксимациите е добре известна теоремата на Джексън от 1911 г. за оценка отгоре на най-доброто тригонометрично приближение на функция с класическия модул на гладкост от първи ред. В доказателството на тази теорема се използват интеграли на Джексън зададени така

$$J_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t)\,dt,$$

където

$$K_n(t) := \lambda_n \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4, \quad m := \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 1.$$

В представената монография се разглежда алгебричната версия на обобщените тригонометрични интеграли на Джексън. Това са операторите

$$G_{s,n} \ : \ C[-1,1] \to \Pi_{sn-s}$$

$$G_{s,n}(f,x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(\arccos x + v)) K_{s,n}(v) dv,$$

$$K_{s,n}(v) \ := \mu_{s,n} \left(\frac{\sin(nv/2)}{\sin(v/2)} \right)^{2s},$$

където $\mu_{s,n}$ е избрано така, че $\int_{-\pi}^{\pi} K_{s,n}(v) dv = 1$.

Операторът $G_{s,n}$ е точен за полиноми от нулева степен, но не е точен за полиноми от първа степен. Као и Гонска го модифицират така, че да запазва и полиномите от първа степен. Те дефинират операторите $G^{*}_{s,n} \ : \ C[-1,1] \to \Pi_{sn-s}$ и $G^{+}_{s,n} \ : C[-1,1] \to \Pi_{sn-s}$. Нека Lf е линейна функция, която интерполира f в -1 и 1

$$L(f,x) := \frac{1}{2} f(1)(x+1) + \frac{1}{2} f(-1)(1-x), \ -1 \le x \le 1,$$
$$G^{*}_{s,n}(f,x) := G_{s,n}(f,x) + L(f,x) - G_{s,n}(Lf,x),$$
$$G^{+}_{s,n}(f,x) := G_{s,n}(f,x) + L(f,x) - L(G_{s,n} f,x).$$

Као и Гонска правят оценки само отгоре на грешката на операторите $G_{s,n}$, $G^{*}_{s,n}$ и $G^{+}_{s,n}$ в равномерна метрика с класически модули на гладкост.

Класическите модули на гладкост, които използват Као и Гонска не позволяват съгласувана обратна теорема (дори от слаб тип). Модулите на Дициан - Тотик биха дали обратна теорема от слаб тип, но не и от силен тип. Тук променяме характеристиката като дефинираме подходящ K - функционал и съответен модул и получаваме права и съгласувана обратна теорема от силен тип. Дефинициите на характеристиките са съгласувани с вида на модификацията на Као-Гонска. Резултатите са структурирани в 6 глави. В Глава 1 е направена характеризация на грешката на операторите $G_{s,n}$, $G^{*}_{s,n}$ и $G^{+}_{s,n}$ със съответни K - функционали в равномерна метрика. В Глава 2 е направена характеризация на K -функционалите с модули на гладкост в равномерна метрика. В Глава 3 е направена характеризация на K-функционал с модул при $p<\infty$. В глава 4 е направена характеризация на грешката на оператора $G_{s,n}$ с K- функционал в интегрална метрика с тегло. В Глава 5 е направена характеризация на K -функционал с модул в интегрална метрика с тегло. В глава 6 е направена характеризация на най-доброто алгебрично приближение с модул в интегрална метрика с тегло. Номерата на теоремите, лемите и формулите за всяка глава са отделни. Цитираните теореми са означени с латински букви.

Първите три глави на монографичния труд са резултати от дисертацията, като в третата глава тези резултати са обобщени в сравнение с дисертационния труд. В четвърта и пета глава резултатите от дисертацията са пренесени в L_p- пространство с тегло. Последната – шеста глава се отнася за полиноми на най-добро алгебрично приближение.

Голяма част от резултатите в този труд са докладвани на

- семинара по теория на апроксимациите – ИМИ БАН през 2006, 2007 г.
- Румъно-Германския семинар по теория на апроксимациите, Сибиу, май, 2008 г.
- Румъно-Германския семинар по теория на апроксимациите, Сибиу, май, 2012 г.
- Международната конференция по частни диференциални уравнения и приложения, София, септември, 2011 г.
- Международната конференция NODDEA, Русе, октомври,2012 г.
- Международната конференция CTF, Созопол, юни, 2013 г.
- Международната конференция AMEE, Созопол, юни, 2013 г.

Т. Запрянова

4. Учебници и учебни помагала

- Дочо Дочев, Дико Суружон, Росен Николаев, Тодор Стоянов, Теодора Запрянова, Йордан Петков. Математика с приложения в икономиката, „Наука и икономика”, 2011,с. 432-471, учебник

Авторско участие : Т. Запрянова - глава 9, с. 432-471.

Учебникът е предназначен за студенти от Икономически университет и е написан под редакцията на проф. Дочо Дочев. Глава 9 е посветена на неопределен интеграл. В тази глава са представени основните методи за интегриране, придружени с подходящи примери. Формулирани и доказани са твърдения представящи теоретичния материал. Разгледани са: непосредствено интегриране, интегриране чрез внасяне под знака на диференциала, интеграли от някои тригонометрични изрази, интегриране по части, интегриране на рационални функции, интегриране чрез субституция.

Т. Запрянова

- Д. Димитров, В. Бошнаков, Ю. Вълкова, Т. Запрянова, М. Каракулаков, Р. Мирянов. Математика, Сборник от решени и нерешени задачи за икономисти –„Наука и икономика”, 2010, с.189-263 – ръководство

Авторско участие : Т. Запрянова - глави 16,17, с. 189-263.

Сборникът е предназначен за студенти от Икономически университет. Авторът разглежда темите неопределен интеграл (16 глава) и определен интеграл (част от 17 глава). В тези глави са систематизирани основните методи за интегриране. Теоретичният материал е онагледен с решени примери. Включени са общо 228 задачи, като тези за самостоятелна работа са с отговори и упътвания.

Т. Запрянова