

ПЪРВА МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО ФИНАНСОВА И АКТИВНА МАТЕМАТИКА

НОЕМВРИ, 2016 Г.

ВЪЗРАСТОВА ГРУПА – СТУДЕНТИ

Задача 1. Цената на дадена стока през м. Септември се е понижила със 17% в сравнение с м. Август, а през м. Октомври с още 6% в сравнение с м. Септември. Да се намери процентът на намаление на цената през м. Октомври в сравнение с м. Август.

- A) 23% B) 11% C) 102% D) 20,23% E) 21,98%

Отговор: E) 21,98%

Задача 2. Да се определи индексът на инфлация през 2015 г. в сравнение с 2014 г., ако са известни потреблението и цените на 10 вида стоки (таблица 1).

Таблица 1

Стока	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Потребление 2014 г.	60	240	100	120	300	40	160	800	210	420
Цена 2014 г.	6	0,9	4,5	8	3,5	12	2,1	0,5	8	4,2
Цена 2015 г.	6,2	1,1	4,3	7	4	15	2	0,8	9	5

- A) 0,89 B) 1,12 C) 1,12% D) 12,47% E) 1,5

Отговор: B) 1,12

Задача 3. Да се намери максималната сума (до втория знак след десетичната запетая), която инвеститор е готов да вложи в проект, ако от него очаква да получи доходи, съответно 10000 евро през първата година след началната и 200000 евро през втората година след началната. Желаната от инвеститора годишна доходност е 6,25%.

- A) 201251,4 B) 152387,26 C) 12250 D) 186574,39 E) 190258,18.

Отговор: D) 186574,39.

Задача 4. Сума 10000 евро е вложена на срочен едномесечен депозит при $p\%$ сложна лихва. В края на първия месец към натрупаната сума са добавени 5000 евро, като депозитът е подновен. В края на втория месец към натрупаната сума са добавени още 2500 евро и депозитът е подновен отново. Какъв е минималният лихвен процент p , така че в края на третия месец натрупаната сума да не е по-малко от 20000 евро?

- A) 2% B) 3% C) 4% D) 5% E) 6%

Отговор: E) 6%

Задача 5. Сума K евро е вложена в банка при 5% сложна лихва. В края на всяка година ($n = 1, 2, 3, \dots$) от сметката се теглят по 1000 евро. Да се намери минималната сума K , така че процесът да продължи до безкрай.

- A) 100000 евро B) 10000 евро C) 1500 евро D) 20000 евро E) 50000 евро

Отговор: D) 20000 евро

Задача 6. Инвеститор желае да инвестира 100000 евро в два актива – А и В. Очакваните годишни възвръщаемости на активите са съответно $M(r_A) = 6\%$ и $M(r_B) = 8\%$, а стандартните отклонения на възвръщаемостите – съответно $\sigma_A = 2$ и $\sigma_B = 2,5$. Коефициентът на корелация на възвръщаемостите е $\rho_{AB} = 0,3$. Какви суми трябва да вложи инвеститора във всеки от двата актива, така че дисперсията на възвръщаемостта (σ^2) на получения портфейл да е минимална?

Решение. Нека инвеститора разполага с капитал 1, като x е частта, инвестирана в А и $(1-x)$ – частта, инвестирана в В, $x \in [0,1]$. Портфейлът от двата актива p има характеристики:

$$r_p = xr_A + (1-x)r_B \text{ (възвръщаемост на портфейла);}$$

$$M(r_p) = M(xr_A + (1-x)r_B) = xM(r_A) + (1-x)M(r_B) \text{ (очаквана възвръщаемост на портфейла),}$$

което следва от свойствата на математическото очакване.

Съгласно определението за дисперсия:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= M\left(r_p - M(r_p)\right)^2 = M\left(r_p^2\right) - M^2\left(r_p\right) = \\ &= M\left(xr_A + (1-x)r_B\right)^2 - \left(xM(r_A) + (1-x)M(r_B)\right)^2 = \\ &= M\left(x^2r_A^2 + (1-x)^2r_B^2 + 2x(1-x)r_Ar_B\right) - x^2M^2(r_A) - (1-x)^2M^2(r_B) - 2x(1-x)M(r_A)M(r_B) = \\ &= x^2\left[M(r_A^2) - M^2(r_A)\right] + (1-x)^2\left[M(r_B^2) - M^2(r_B)\right] + 2x(1-x)\underbrace{\left[M(r_Ar_B) - M(r_A)M(r_B)\right]}_{\text{cov}(r_A, r_B) = \sigma_A\sigma_B\rho_{AB}} = \\ &= x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 + 2x(1-x)\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}. \end{aligned}$$

В случая

$$\sigma_p^2 = 4x^2 + 6,25(1-x)^2 + 2x(1-x) \cdot 2 \cdot 2,5 \cdot 0,3 = 7,25x^2 - 9,5x + 6,25 \rightarrow \min_{x \in [0,1]}$$

$$(\sigma_p^2)' = 14,5x - 9,5 = 0 \Rightarrow x = 0,65517 \in [0,1] \text{ и } (\sigma_p^2)'' = 14,5 > 0, \text{ следователно}$$

$$\min_{x \in [0,1]} \sigma_p^2 = \sigma_p^2(0,65517).$$

Инвеститора трябва да вложи $x \cdot 100000 = 65517$ евро в А и $(1-x) \cdot 100000 = 34483$ евро в В.

Задача 7. Известни са функционалните зависимости на месечните печалби Π_1 и Π_2 на две конкурентни фирми в зависимост от значенията p_1, p_2 и p_3 на три фактора:

$$\Pi_1(p_1, p_2, p_3) = -2p_1^2 + 3p_2^2 + 4p_3^2 - 5p_1p_2 + 5p_1p_3 - 15p_1 + 16p_2 - 24p_3 + 36;$$

$$\Pi_2(p_1, p_2, p_3) = -4p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2 + p_1p_3 + 4p_2p_3 - 3p_1 + 4p_2.$$

Ако $p_1 = p$ (const) и $\Pi_1 = \Pi_2$, да се намери $f(p) = p_1 + p_2 + p_3$.

Решение.

$$II_1 - II_2 = 2p_1^2 + 2p_2^2 + 4p_3^2 - 4p_1p_2 + 4p_1p_3 - 4p_2p_3 + 12p_1 + 12p_2 - 24p_3 + 36 = 0 \quad | : 2 ;$$

$$p_1^2 + p_2^2 + 2p_3^2 - 2p_1p_2 + 2p_1p_3 - 2p_2p_3 + 6p_1 + 6p_2 - 12p_3 + 18 = 0 ;$$

$$(p_1 - p_2 + p_3 - 3)^2 + (p_3 - 3)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 - p_2 + p_3 - 3 = 0 \\ p_3 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = p_2 = p \\ p_3 = 3 \end{cases} .$$

Тогава $f(p) = p_1 + p_2 + p_3 = 2p + 3$.